

# מבוא לאקונומטריקה

פרק 3 - מודלים לא ליניאריים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## מודלים לא ליניאריים:

רקע:

| הגמישות<br>$\left(\frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{X}{Y}\right)$<br>בכמה % ישתנה<br>$Y$ אם נגדיל את<br>$X$ ב-1%! | השינוי השולי<br>$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)$<br>בכמה ישתנה<br>$Y$ אם נגדיל את<br>$X$ ביחידה! | משמעות ה- $\beta$                                                                | המודל                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\beta X}{Y}$                                                                                                       | $\beta$                                                                                                      | השינוי השולי<br>אם נגדיל את $X$ ביחידה<br>$Y$ ישתנה ב- $\beta$ יחידות            | ליניארי:<br>$Y = \alpha + \beta X + u$                                                           |
| $\beta X$                                                                                                                 | $\beta Y$                                                                                                    | שיעור השינוי השולי<br>אם נגדיל את $X$ ביחידה<br>$Y$ ישתנה ב- $100 \cdot \beta\%$ | חצי לוגריתמי:<br>$\ln Y = \alpha + \beta X + u$<br>$(Y = e^{\alpha + \beta X + u})$              |
| $\beta$                                                                                                                   | $\frac{\beta Y}{X}$                                                                                          | הגמישות<br>אם נגדיל את $X$ ב-1%<br>$Y$ ישתנה ב- $\beta\%$                        | לוגריתמי כפול:<br>$\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$<br>$(Y = e^\alpha \cdot X^\beta \cdot e^u)$ |
| $\frac{\beta}{Y}$                                                                                                         | $\frac{\beta}{X}$                                                                                            | אין משמעות כלכלית<br>אם נגדיל את $X$ ב-1%<br>$Y$ ישתנה ב- $\beta$                | לוג ליניארי:<br>$Y = \alpha + \beta \ln X + u$<br>$(e^Y = e^\alpha \cdot X^\beta \cdot e^u)$     |

- המשתנה שיש בו  $LN$  השינוי בו יהיה באחוזים.

תזכורת של חוקי לוגים:

$$\begin{aligned}
 LN(e^x) &= x \\
 LN(X^Y) &= Y \cdot LN(X) \\
 LN(X \cdot Y) &= LN(X) + LN(Y) \\
 LN\left(\frac{X}{Y}\right) &= LN(X) - LN(Y)
 \end{aligned}$$

## שאלות:

(1) על מנת לאמד את התשואה להשכלה בישראל בשנים 1948-1990 נאמדו המודלים הבאים:

$$1. \quad MWAGE_t = 139.547 + 118.628 \cdot SCL_t$$

$$2. \quad MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t$$

$$3. \quad LN(MWAGE)_t = 5.244 + 0.778 \cdot LN(SCL)_t$$

$$4. \quad LN(MWAGE)_t = 6.292 + 0.070 \cdot SCL_t$$

א. הסבירו את המשמעות של  $\beta$  בכל אחד מהמודלים.

ב. חשבו את הגמישות בנקודת הממוצעים: (12.311, 1600.01) עבור כל אחד מהמודלים.

(2) נתונים תוצאות האמידה של המודלים הבאים:

$$1. \quad \hat{Y} = e^{4.5} \cdot X^{0.05}$$

$$2. \quad \hat{Y} = e^{4.5+0.05X}$$

$$3. \quad \hat{Y} = 4.5 + \frac{0.05}{X}$$

$$4. \quad \hat{Y} = \frac{1}{1 + e^{4.5+0.05X}}$$

א. כתבו את המודלים בצורה ליניארית בעזרת טרנספורמציה מתאימה.

ב. עבור כל אחד מהמודלים ערכו תחזית נקודתית עבור  $X = 6$ .

(3) נתונים המודלים הבאים עבור התוצר במשק:

$$1. \quad Q_i = AK_i^{\beta_1} e^{u_i}$$

$$2. \quad Q_i = Ae^{\beta_1 L_i + u_i}$$

$$3. \quad Q_i = A + K_i^{\beta_1} + e^{u_i}$$

$$4. \quad Q_i = A + \frac{\beta_1}{L_i} + u_i$$

$$5. \quad Q_i = A + \beta_1 \sqrt{K_i} + u_i$$

$$6. \quad Q_i = e^{A + \beta_1 K_i + u_i}$$

$$7. \quad Q_i = A \left( \frac{K_i}{2} + 7 \right)^{\beta_1} e^{u_i}$$

$$8. \quad Q_i = A + \beta_1 L_i + u_i$$

$$9. \quad Q_i = A + \beta_1 \left( \frac{K_i}{L_i} \right) + u_i$$

כאשר :

$Q$  - הוצאות צריכה על מוצר מסוים על ידי פרט מסוים.

$A$  - הוצאות צריכה על המוצר בהינתן רמת הכנסה אפסית.

$K$  - הכנסת הפרט.

$L$  - שנות לימוד.

א. מי מהמודלים הבאים ניתן לאמידה בשיטת OLS?

ב. מי מבין המודלים שלא ניתנים לאמידה בשיטת OLS ניתן להביא למודל ליניארי בפרמטרים ועל כן לאמוד את הפרמטרים שלו?

ג. עבור כל אחד מהמודלים קבעו מיהו המשתנה המוסבר ומיהו המסביר במשוואת הרגרסיה הליניארית.

ד. עקומת אנג'ל מתארת את גמישות הצריכה של הפרט מוצר מסוים ביחס להכנסתו. איזה מהמודלים מתאים כדי לתאר את עקומת אנג'ל?

$$(4) \quad \text{נתון המודל הבא: } Q_i = \frac{A}{K_i^{\beta_1}} e^{u_i}$$

א. האם ניתן לאמוד את המודל בשיטת OLS?

ב. מה המשוואה שצריך לאמוד על מנת לקבל את הפרמטרים למודל זה (כלומר כיצד הופכים את המודל לליניארי בפרמטרים)?

ג. נאמד המודל הבא:  $\ln(Q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_i) + u_i$ , והתקבלו התוצאות

הבאות:  $\hat{\alpha}_0 = 3$ ,  $\hat{\alpha}_1 = 0.8$ .

מהם האומדנים עבור  $A$ ,  $\beta_1$ ?

(5) נתון כי הקשר באוכלוסייה בין  $X$  ל- $Y$  נתון על ידי המודל

הבא:  $\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$ . נתון גם כי עבור המודל הנ"ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (\ln X_t - \ln \bar{X}) \ln Y_t}{\sum_{t=1}^T (\ln X_t - \ln \bar{X})^2} : \beta \quad \text{כלכלן הציע את האומדן הבא עבור } \beta$$

א. האם האומדן ליניארי?

ב. האם האומדן חסר הטיה?

ג. האם האומדן *blue*?

ד. מהי שונותו?

## תשובות סופיות:

- (1) א.1. השינוי השולי. ב.2. אין משמעות כלכלית. ג.3. גמישות. ד.4. שיעור השינוי השולי.

א.1. 0.912 ב.2. 0.77 ג.3. 0.778 ד.4. 0.861

- (2) א.1.  $\ln(Y) = 4.5 + 0.05 \cdot \ln(X)$  ב.2.  $\ln(Y) = 4.5 + 0.05X$

ג.3. אין צורך. ד.4.  $\ln\left(\frac{1-\hat{Y}}{\hat{Y}}\right) = 4.5 + 0.05X$

א.1. 98.45 ב.2. 121.51 ג.3. 4.50833 ד.4. 0.00816

- (3) א. מודלים: 4, 5, 8 ו-9.

ב. מודלים: 1, 2, 6 ו-7.

ג.1. מסביר:  $\ln(K_i)$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$  ב.2. מסביר:  $L_i$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$

ג.3. אינו ליניארי. ד.4. מסביר:  $\frac{1}{L_i}$ , מוסבר:  $Q_i$

ה.5. מסביר:  $\sqrt{K_i}$ , מוסבר:  $Q_i$  ו.6. מסביר:  $K_i$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$

ז.7. מסביר:  $K_i = \frac{K_i}{2} + 7$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$  ח.8. מסביר:  $L_i$ , מוסבר:  $Q_i$

ט.9. מסביר:  $\frac{K_i}{L_i}$ , מוסבר:  $Q_i$

י. מודלים: 1 ו-7.

- (4) א. לא. ב.  $\ln(Q_i) = \ln(A) - \beta_1 \ln(K_i) + u_i$

ג.  $\beta_1 = -0.8$ ,  $A = 20$

- (5) א. כן. ב. כן. ג. כן. ד.  $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{SS \ln x}$